I Séries numériques

I.A Questions de cours :

1) Enoncer le théorème de comparaison série/intégrale
2) Enoncer les relations de comparaisons des sommes partielles, restes, séries, ...
3) Enoncer le théorème spécial séries alternées avec majoration du reste

I.B Exercices :

Exercice 1: *

1. Montrer que si $0 < l < 1$ et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 2: *

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
2. $\sum \frac{\sin(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2})}{n}$
3. $\sum \frac{\sin(\frac{10^6\pi - 1}{\sqrt{n}})}{n^{2/3}}$
4. $\sum \frac{1}{n+\frac{3}{2}n(n^{1/8}+1)}$

Exercice 3: * (Loi de Poisson et loi géométrique)

1. Soit $\lambda > 0$. Déterminer la nature de $\sum p_n$ où $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. Si elle converge donner sa valeur. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $\mathbb{P}(X = n) = p_n$.
2. Soient $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
3. Soit $0 < p < 1$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} p_n$ où $p_n = p(1-p)^{n-1}$. Si elle converge donner sa valeur.

Exercice 4: **

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^a}$ quand $a \leq 0$
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^a}$ quand $a > 0$
3. En déduire la nature de $\sum \frac{1}{n\ln(n)^{1/2}\ln(\ln(n))}$.

Exercice 5: **

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs qui décroît vers 0.
Quelle est la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$?

Exercice 6: **

Soit $\alpha > 0$. Étudier $\sum u_n$ quand $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{5\alpha}}\right)$?

Exercice 7: **

Soit $\sum a_n$ une série de nombres réels convergente. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k a_k = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

Exercice 8: ***

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$
2. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_n$ converge. On note γ sa limite.
3. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma$.

Exercice 9: ***

1. En utilisant la sommation des relations de comparaison, déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$ pour $a > 1$.
2. Montrer la même chose avec une comparaison série-intégrale.

Exercice 10: *** (Formule de Wald)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 11: ****(*)

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. Donner un équivalent de u_n où : $\left\{\begin{array}{ccc} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \ln(1+u_n) \end{array}\right.$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.
4. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n.